

Intégration de l'entropie des sollicitations en service dans l'évaluation de l'endommagement

Raed KOUTA^(a), Daniel PLAY^(b)

(a) Université de Technologie Belfort Montbéliard, 90010 Belfort Cedex

(b) Institut National des Sciences Appliquées de Lyon,
20 Rue A. Einstein, 69621 Villeurbanne cedex

Résumé : Une des grandes difficultés rencontrée dans l'intégration de conditions réelles d'usage lors de la conception d'un composant mécanique, réside dans la capacité à bien analyser et représenter les sollicitations réelles pour les démarches de calcul de l'endommagement et de la durée de vie. L'entropie selon Shannon, est une fonction mathématique qui correspond à la quantité d'information contenue ou délivrée par une source d'information. Intuitivement, l'entropie de Shannon peut être vue comme mesurant la quantité d'*incertitude* liée à une sollicitation aléatoire ou plus précisément à sa distribution statistique. Notre étude intègre ce concept de l'entropie dans la démarche de calcul de l'endommagement d'une entité mécanique. Cette intégration s'effectue autour de l'analyse de la sollicitation que l'entité mécanique va subir, de l'interaction entre la sollicitation extérieure et l'entité mécanique étudiée et de la réponse aléatoire que cette entité va délivrer. De plus, l'endommagement est considéré comme une probabilité de dégradation des performances de l'entité mécanique étudiée. Le suivi de l'endommagement s'effectue par son entropie. Des applications seront présentées autour de l'analyse d'essais d'endurance effectués sur un véhicule terrestre. Ces analyses aident à la classification des différentes conditions d'essais et à proposer des indicateurs de corrélation entre les différents environnements d'essais. Cette corrélation est indispensable pour conduire à la réduction du temps des essais sans altérer leurs niveaux de fiabilité et de représentativité.

1 INTRODUCTION

La fatigue, l'endommagement, la dégradation des performances et la défaillance d'une entité mécanique sont dus principalement aux conditions réelles d'usages. Toutes les méthodes d'évaluation prévisionnelle de la durée de vie d'une entité mécanique nécessitent pour leurs exploitations une simplification des sollicitations aléatoires subies par l'entité mécanique.

Les motivations de cette étude partent du constat qu'opérer trop de simplifications sur une sollicitation aléatoire fait perdre beaucoup de son contenu informationnel et, par conséquent, risque de faire perdre les bonnes informations issues des conditions réelles d'usage. Cette perte d'informations aura une influence sur les décisions de conception de l'entité mécanique étudiée.

Aujourd'hui, l'analyse d'une sollicitation aléatoire s'effectue de plusieurs manières et selon plusieurs approches, dans l'objectif d'évaluer ultérieurement la nature incertaine de la durée de vie d'un composant mécanique.

Les analyses statistiques et les analyses fréquentielles constituent deux approches complémentaires. Les analyses statistiques ont l'avantage de conduire à des modèles probabilistes [1] qui offrent des possibilités de modélisation de la dispersion naturelle des sollicitations étudiées et de leurs conséquences (fissuration, fatigue, endommagement, durée de vie, etc.). L'inconvénient de ces analyses statistiques réside cependant dans le fait qu'elles ignorent l'historique des événements. D'un autre côté, les analyses fréquentielles tentent de remédier à cet inconvénient, en utilisant des relations qui existent entre, d'une part, les fréquences contenues dans la sollicitation considérée et, d'autre part, soit les amplitudes moyennes mesurées (étudiées avec la transformée de Fourier, TF), soit leurs dispersions (étudiées avec la densité spectrale de puissance, DSP) [2, 3]. L'inconvénient des analyses fréquentielles réside dans la nécessité d'émettre beaucoup d'hypothèses et de simplifications pour les exploiter dans des modèles de calcul de durée de vie (par exemple, limitation à un système avec un degré de liberté en utilisant des modèles probabilistes simplifiés pour l'enveloppe de la sollicitation).

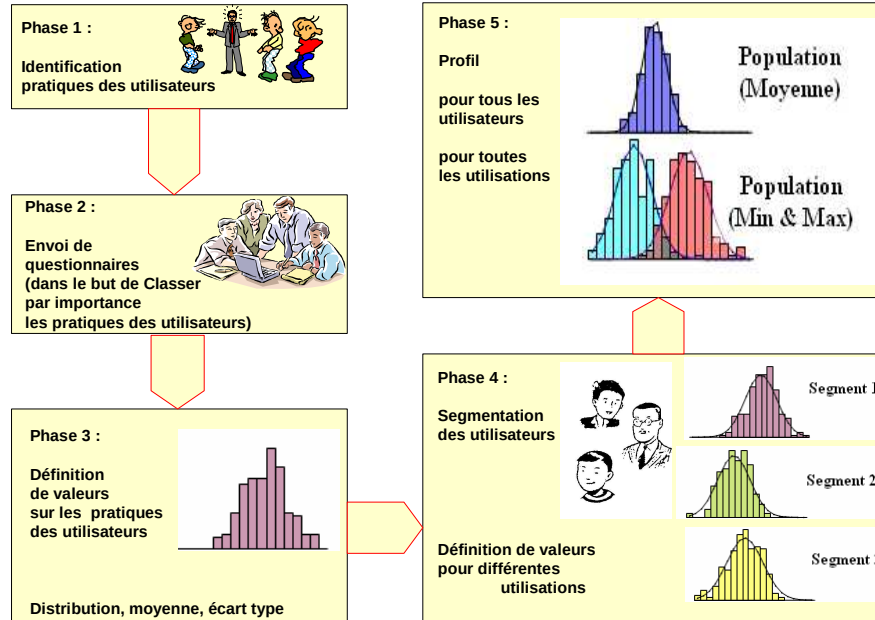
Dans cette étude, il est proposé de prendre en compte l'entropie de la sollicitation aléatoire que subit l'entité mécanique concernée et de mettre en relation l'entropie de la cause (qui est la sollicitation aléatoire) et la conséquence qui est l'endommagement qui en résulte.

2 CONDITIONS REELLES D'USAGES ET ENDOMMAGEMENT D'UN SYSTEME MECANIQUE

Les systèmes mécaniques et les composants mécaniques assurent des fonctions en vue d'actions plus ou moins compliquées. Ces actions sont effectuées et pilotées par un ou plusieurs utilisateurs dans des conditions variées [4]. La diversité des utilisations conduit ainsi à un grand nombre de situations de chargement. Le défi des concepteurs des systèmes et composants mécaniques est alors d'intégrer toutes ces conditions réelles d'usage [5]. Plus généralement, le défi consiste à prendre en compte les souhaits déclarés ou éventuellement non explicités des utilisateurs. Il s'agit concrètement de considérer la diversité des chargements et des sollicitations appliquées aux composants mécaniques. Cette condition est ajoutée aux exigences d'optimisation géométrique et aux conditions de résistance des matériaux [6]. Elle nécessite la mise en place d'un outillage de calcul adapté, à la fois pour obtenir un modèle représentatif des chargements et pour mener à bien les calculs de dimensionnement [7].

La prise en compte des conditions réelles d'usage devient un enjeu technologique et économique. Mais elle entraîne un profond changement d'attitude puisque les causes sont envisagées d'une manière probable à partir de suppositions sur l'utilisation par un segment significatif d'une population. Et, naturellement, le calcul des effets résultants sera présenté en termes de probabilité de résistance et de fiabilité [8]. Cette approche est possible car deux maillons de la modélisation sont bien maîtrisés actuellement. Tout d'abord, les conséquences des chargements variés appliqués sur les composants peuvent être analysées et calculées en termes de surcharges dynamiques [9] [10]. Puis le comportement physique des matériaux soumis à des sollicitations répétées est de mieux en mieux connu [11] [12]. L'ingénieur concepteur peut alors mettre en place des méthodes de calcul conciliant au mieux les connaissances actuelles et les objectifs qu'il doit atteindre. Ainsi, en amont de l'approche, il lui faut connaître les chargements à partir des conditions imposées par les utilisateurs. Et, en aval de l'approche, il lui faut calculer les conséquences de ces chargements.

Une des grandes difficultés rencontrées dans l'intégration de conditions réelles d'usage lors de la conception d'un composant mécanique réside dans la variété de ces mêmes conditions. Par exemple, un modèle d'appareils est conçu comme une réponse aux besoins d'une classe d'utilisateurs (figure ci-dessous).



Une classe d'utilisateurs ou classe d'usage [5] [13] [14] [15] est souvent déterminée en fonction d'un profil de vie dont une étude du marché a confirmé l'existence. Malgré la définition de plusieurs classes d'usage, les constructeurs cherchent autant que faire se peut, sur les parties opératives des appareils, à rendre l'offre plus globale, c'est-à-dire à trouver des éléments intégrateurs de ressemblance entre différentes classes d'usage. La présentation la plus simple d'une classe d'usage ou d'un profil de vie dans le domaine des transports consiste, par exemple, à formuler le kilométrage qu'un utilisateur moyen fera durant une période déterminée. Ce kilométrage se présente comme une somme pondérée d'un ensemble de types de sévérité souvent appelés des profils de missions ou tranches de vie (bonne route, mauvaise route, rond-point, montagne, ville, différentes

conditions climatiques, etc.). Même dans le cas de ces configurations simplifiées, les calculs prévisionnels de résistance et de durée de vie nécessitent l'énoncé de simplifications et d'hypothèses qui conduisent à l'emploi de facteurs de sécurité [16] pour limiter les risques de défauts. En effet, une classe d'usage (ou un profil de vie) est considérée par le concepteur de composants mécaniques, comme un ensemble homogène. Malgré tout, cette homogénéité s'accompagne d'incertitudes qui nécessitent une prise en compte en termes d'informations aléatoires. Il est en effet prouvé aujourd'hui [17] qu'une contrainte mécanique aléatoire conduit à une durée de vie plus réduite qu'une contrainte alternée qui lui semble globalement semblable.

Le calcul prévisionnel de la durée de vie d'un système ou d'un composant mécanique fonctionnant dans des conditions réelles d'usage, s'effectue à partir de l'état de fatigue des matériaux constitutifs des composants étudiés. La fatigue des matériaux se manifeste chaque fois que les efforts et les sollicitations varient au cours du temps. Ces sollicitations aléatoires prennent des allures très variées [18] et [19]. La rupture peut ainsi apparaître avec des contraintes relativement faibles, quelques fois inférieures à une limite conventionnelle appelée la *limite d'endurance* S_D . La fatigue des matériaux est abordée de deux façons. La première repose sur une approche globale où le matériau est considéré comme un milieu homogène à une échelle macroscopique. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont définies par les courbes de fatigue dont la plus connue est la courbe de Wöhler. Les points critiques des composants sont définis par les points de sollicitations les plus dommageables et les calculs de durée de vie sont faits en ces points. La seconde façon d'aborder la fatigue des matériaux repose sur une approche locale où des défauts caractéristiques potentiels du matériau (fissures) est considérée. Dans ces zones, les sollicitations conduisent à la définition d'une vitesse de fissuration et la rupture est obtenue lorsqu'une longueur limite de fissure est atteinte. Ces deux façons d'aborder le calcul de la durée de vie en fatigue des systèmes ou des composants mécaniques utilisent les mêmes distributions de charges aléatoires. La présentation de cet article sera cependant limitée à l'approche globale car cette façon d'aborder la résistance des matériaux est très largement répandue et repose sur une large compétence dans l'industrie. Un gain significatif de la qualité des prévisions, est alors attendu avec la prise en compte des sollicitations aléatoires.

Les articles [18] [19] et [20] récapitulent les démarches probabilistes de prise en compte en compte de la nature aléatoire d'une sollicitation que subit une entité mécanique afin d'évaluer son endommagement et sa durée de vie. Dans cette présente étude, la sollicitation aléatoire qu'une entité mécanique subit, est prise en compte selon son entropie.

3 ENDOMMAGEMENT ET ENTROPIE

L'évolution du dommage est toujours calculée à partir du modèle de Miner. On écrit qu'un élément de dommage par fatigue dD est dû à un élément de sollicitation dn . Selon la loi de Miner

$$dD = \frac{dn}{N(S)} \quad (1)$$

avec dn = le nombre d'amplitudes de la sollicitation étudiée dont le niveau est compris entre S et $S+ds$ et $N(s)$ est le modèle d'endurance (ou de durée de vie limite qui est modélisée par une courbe, appelée courbe de Wöhler). Pour une durée donnée T , $dn = N_T \cdot f_s(s) \cdot ds$, avec N_T nombre total des sollicitations et $f_s(s)$ densité de probabilité de la contrainte dont le niveau est égal à S . Pour une sollicitation mesurée avec un pas de temps $\Delta t = 1/f_e$ (f_e fréquence d'échantillonnage), le nombre total des sollicitations est égal à $N_T = f_e \cdot T$. Ainsi, le dommage global est la somme des dommages partiels pour toutes les valeurs de S :

$$D = N_T \cdot \int_{\Delta} \frac{f_s(s)}{N(S)} \cdot ds \quad (2)$$

Avec Δ = domaine de définition de S . Dans le cas où la courbe de Wöhler est considérée selon le modèle de Basquin ($N S^b = C$, C est une constante fonction du niveau de sollicitation), l'expression de l'endommagement devient

$$D = \frac{N_T}{C} \cdot \int_{\Delta} s^b f_s(s) \cdot ds \quad (3)$$

Si on pose $u = \frac{S}{\sqrt{V(S)}}$ avec $V(S)$ la variance de S , la relation précédente s'écrit

$$D = [V(S)]^{b/2} \frac{N_T}{C} \cdot \int_{\Delta} u^b f_U(u) du \quad (4)$$

Le terme $\int_{\Delta} u^b f_U(u) du$ est le moment d'ordre b ($E(X^b)$) de la variable aléatoire U ou même de la sollicitation aléatoire (S) que le système étudié a subi. Ce moment est directement lié à l'entropie de la densité de probabilité définie selon Shannon. En effet, l'entropie d'une distribution a été définie par Shannon pour les lois discrètes définies par ses probabilités $I_X = - \sum p_i \ln p_i$ et étendue ensuite aux lois continues définies par leur densité selon $I_X = - \int \ln\{f(x)\} f(x) dx$ (Rényi, 1966). Mais on sait que ces deux définitions peuvent après coup provenir de la définition de la divergence de Kullback entre deux lois que l'on étend en prenant des mesures de référence convenables pour les lois discrètes et continues [21]. Dans la suite il est naturellement sous-entendu que ces quantités sont définies et finies pour les lois considérées (*à propos des notations, « E » étant pris par l'espérance, nous prenons le "I" d'information pour simplifier un peu nous gardons le logarithme népérien ln*).

L'entropie stochastique a reçu une forte attention en théorie de l'information, avec des analogies physiques bien connues, mais elle possède aussi des propriétés propres à son origine probabiliste. C'est notamment le cas dans les sciences humaines où l'on travaille avec des lois qualitatives ou nominales, les chercheurs ont retenu l'entropie d'une distribution au titre d'un paramètre de dispersion comparable à la variance [22]. C'est aussi une partie du discours de Dacunha-Castelle quand il met ces deux définitions en parallèle.

Dans cette étude deux configurations de lois de probabilités sont traitées (loi Gamma et loi Beta1).

2.1 Cas de la loi Gamma

La loi $\Gamma(\alpha, \lambda)$ de densité

$$f(x) = x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \lambda^{\alpha} / \Gamma(\alpha) \quad (5)$$

$$\ln f(x) = -\lambda x + (\alpha-1) \ln x + \ln(\lambda^{\alpha} / \Gamma(\alpha)) \quad (6)$$

et donc

$$I_X = \lambda E(X) - (\alpha-1)E(\ln X) - \ln(\lambda^{\alpha} / \Gamma(\alpha)) = \alpha - (\alpha-1) E(\ln X) - \ln(\lambda^{\alpha} / \Gamma(\alpha)). \quad (7)$$

Pour calculer $E(\ln X)$ on introduit le moment $E(X^b)$. En effet, $E(\ln X) = \frac{d}{db} E(e^{b \ln X}) \Big|_{b=0} = \frac{d}{db} E(X^b) \Big|_{b=0}$. Le calcul de $E(X^b)$ est immédiat, $E(X^b)$ est égale à $\frac{\Gamma(\alpha + b)}{\lambda^b \Gamma(\alpha)}$. On en déduit que $E(\ln X) = \psi(\alpha) - \ln \lambda$ avec ψ la dérivée logarithmique de Γ . Il en résulte que

$$I_X = \alpha + \ln(\Gamma(\alpha)) - (\alpha-1) \psi(\alpha) - \ln \lambda.$$

On considère la famille particulière $\Gamma(\alpha, \alpha/\mu)$ d'espérance commune μ , de variance $\sigma^2 = \mu^2/\alpha$ et d'entropie $I_X = \ln \mu + \eta(\alpha)$, en posant $\eta(\alpha) = \alpha - \ln \alpha + \ln \Gamma(\alpha) - (\alpha-1) \psi(\alpha)$.

Toutes les lois de cette famille sont centrées sur μ mais au niveau de la variance et de l'entropie, les variations sont respectivement en $1/\alpha$ et en $\eta(\alpha)$:

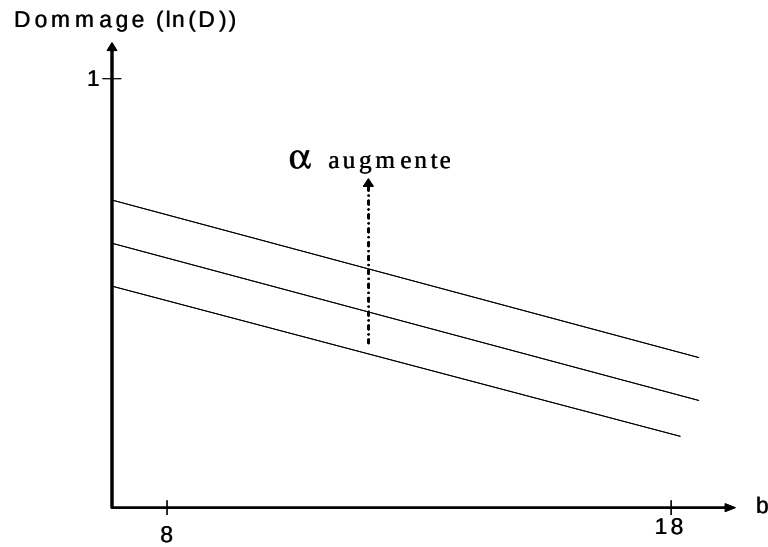
- * La variation de la variance est immédiate, elle est décroissante en fonction de α ,
- * La variation de l'entropie dépend du signe de $\eta'(\alpha) = (\alpha-1) [1/\alpha - \psi'(\alpha)]$;

D'après [23], le terme $\psi'(\alpha) - 1/\alpha$ est positif pour un argument positif (en liaison avec les formules de Binet pour $\ln \Gamma(z)$). Sur le plan probabiliste, il en résulte que l'entropie de la loi $\Gamma(\alpha, \alpha/\mu)$ est croissante en α sur $]0, 1[$ et décroissante pour $\alpha > 1$, ce qui montre un comportement différent entre la variance et l'entropie dans cette famille de lois pour $\alpha \in]0, 1[$.

On sait qu'au voisinage de 0 par valeurs positives $\ln \Gamma(x)$ est équivalent à $-\ln x$ et $\psi(x)$ à $-1/x$; il en résulte que l'entropie tend vers $-\infty$ en $-1/\alpha$ lorsque α tend vers 0.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln \Gamma(x)$ est équivalent à $(x - 1/2) \ln x - x$ et $\psi(x)$ à $\ln x$; il en résulte alors que l'entropie décroît en $-1/2 \ln \alpha$.

Ainsi le dommage et l'entropie de la sollicitation aléatoire sont liés et évoluent d'une manière directement proportionnelle. La figure ci-dessous montre le schéma d'évolution du dommage en fonction de l'argument b qui est aussi la pente de la courbe de Basquin-Wöhler.



2.2 Cas de la loi Beta1

La loi $B(p, q)$ de densité $f(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}$ sur $[0, 1]$. Il s'agit ici d'étudier le cas où la sollicitation aléatoire est bornée. On a $\ln f(x) = (p-1) \ln x + (q-1) \ln(1-x) + \ln \{\Gamma(p+q)/[\Gamma(p)\Gamma(q)]\}$ et donc $I_X = -(p-1) E(\ln X) - (q-1) E(\ln(1-X)) + \ln \{(\Gamma(p)\Gamma(q))/\Gamma(p+q)\}$.

Pour le calcul des espérances E , on a simplement $g(b) = E(X^b) = \frac{\Gamma(p+b)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+b)}$ (directement proportionnel à l'endommagement) d'où $E(\ln X) = g'(0) = \psi(p) - \psi(p+q)$, et de manière analogue $E(\ln(1-X)) = \psi(q) - \psi(p+q)$. Par conséquent $I_X = (p+q-2) \psi(p+q) - (p-1) \psi(p) - (q-1) \psi(q) + \ln \{(\Gamma(p)\Gamma(q))/\Gamma(p+q)\}$.

On considère la famille particulière $B(p, p)$ d'espérance commune $1/2$, de variance $1/(4(2p+1))$ et d'entropie $h(p) = 2(p-1) [\psi(2p) - \psi(p)] + \ln \{(\Gamma(p))^2 / \Gamma(2p)\}$:

- * La variation de la variance est immédiate, elle est décroissante en fonction de p ,
- * La variation de l'entropie dépend du signe de $h'(p) = 2(p-1) [2\psi'(2p) - \psi'(p)]$;

en utilisant l'expression $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+z)^2}$ [23] on établit facilement que $[2\psi'(2p) - \psi'(p)]$ reste négatif pour tout p positif.

Il en résulte que l'entropie est croissante en fonction de p sur $]0, 1[$ et décroissante pour $p > 1$; c'est un second exemple où la variance et l'entropie n'évoluent pas de la même façon, en l'occurrence pour $p \in]0, 1[$. Lorsque p tend vers 0, l'entropie tend vers $-\infty$ en $-1/p$; quand p tend vers $+\infty$, l'entropie décroît en $-1/2 \ln p$.

De même que pour le cas de la loi Gamma, le dommage augmente en fonction de p et diminue lorsque la pente de Basquin-Wöhler augmente.

4 SYNTHÈSE ET DISCUSSION.

Dans les deux familles de distributions $N(0, \sigma^2)$ (Gauss) et $U[a,b]$ (Uniforme), l'entropie est respectivement égale à $\ln(\sigma\sqrt{2\pi})$ et $\ln(2\sigma\sqrt{3})$. À l'inverse dans les deux autres familles $\Gamma(\alpha, \alpha/\mu)$ et $B(p, p)$, on a des relations plus complexes :

$$\Gamma(\alpha, \alpha/\mu): \quad I_X = \ln \mu + \alpha - \ln \alpha + \ln \Gamma(\alpha) - (\alpha-1) \psi(\alpha), \quad \sigma^2 = \mu^2 / \alpha,$$

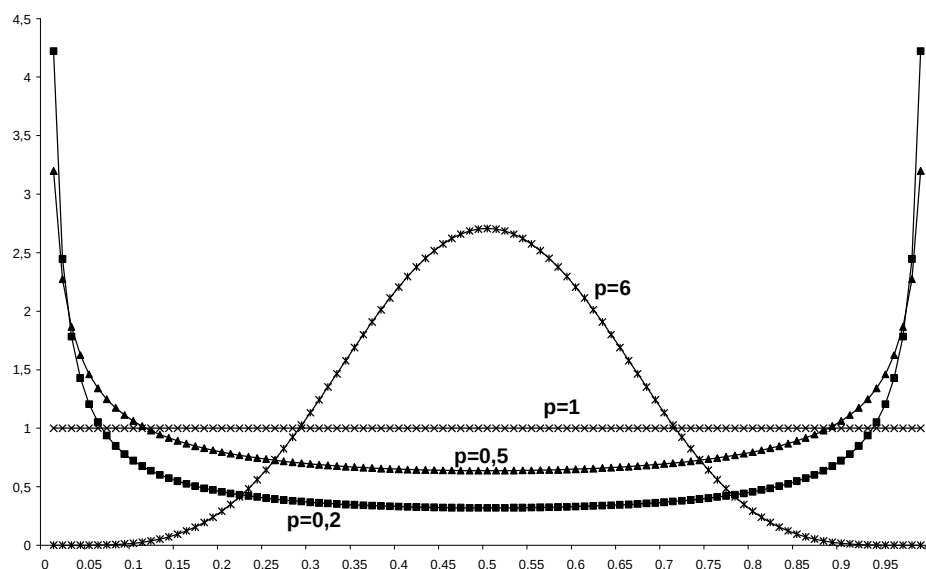
$$B(p, p): \quad I_X = 2(p-1) [\psi(2p) - \psi(p)] + \ln \{(\Gamma(p))^2 / \Gamma(2p)\}, \quad \sigma^2 = 1 / (4(2p+1))$$

qui ne conduisent pas à une dépendance monotone entre la variance et l'entropie de même qu'entre l'entropie et l'endommagement. Ces deux familles illustrent ainsi la différence qu'il y a entre deux entités qui n'ont pas ici des comportements identiques, conformément à l'objet du propos de Dacunha-Castelle : il insiste sur la variance comme indice de dispersion d'une distribution, et sur l'entropie comme indice de variabilité de cette loi, ou encore comme la "quantité de hasard" qu'elle possède ou recèle [24].

En effet, on sait bien que la variance, en tant que moment d'ordre 2 présente une très forte analogie avec les coefficients d'inertie des corps en mécanique, les formules de Koenig Huyghens en probabilité et de Huyghens en mécanique, respectivement autour de l'espérance ou du barycentre, étant les mêmes. Cela montre comment la variance, à la manière d'une inertie, caractérise avant tout la dispersion selon laquelle une mesure (masse, probabilité, mesure de Lebesgue de figures géométriques, ...) est répartie.

Pour sa part la définition de l'entropie provient des pionniers de l'information. Ils ont cherché à établir le lien qu'il peut y avoir entre l'indépendance des épreuves qui concourent à une information finale d'une part, la composition des informations élémentaires que l'on cherche conventionnellement à représenter par l'additivité d'autre part (Guiasu & Theodorescu, 1971; Dacunha-Castelle, 1996 ; Rényi 1966). Les définitions de Shannon et de Kullback en résultent naturellement.

On voit donc comment l'exemple de la loi $B(p, p)$ permet d'illustrer cette différence en langage courant (figure ci-dessous pour $B(p, p)$):



* Lorsque p tend vers zéro la probabilité se concentre autour des deux bornes 0 et 1, ce qui entraîne que la dispersion inertielle ou variance de la distribution augmente et qu'elle croît vers $1/4$. Dans le même temps, le

« champ offert » en pratique à la variabilité ou à l'errance du hasard se resserre au voisinage de ces deux bornes, ce que l'entropie traduit en décroissant en $-1/p$,

* A l'opposé lorsque p tend vers l'infini, le champ offert au hasard se réduit également et l'entropie décroît (en $-1/2 \ln p$), mais il est connexe autour de l'espérance ce qui a pour effet de réduire aussi la dispersion et donc la variance. Ici la différence de comportement entre variance et entropie disparaît.

Ceci permet d'observer combien, en matière d'indices de dispersion, l'entropie paraît plus pertinente que la variance-inertie pour caractériser cette "quantité de hasard" qui est contenue dans une distribution de probabilité. Ainsi, le dommage est directement proportionnel à cette même « quantité du hasard » et de l'entropie de la loi de probabilité associée.

5 REFERENCES

- [1] DEMOULIN (B.). – *Processus aléatoires ; Techniques de l'ingénieur* [R 210]. Base documentaire « Mesures. Généralités » (1990).
- [2] KUNT (M.). – *Traitement numérique des signaux*. Éditions Dunod (1981).
- [3] DEMOULIN (B.). – *Fonctions aléatoires ; Techniques de l'ingénieur* [R 220]. Base documentaire « Mesures. Généralités » (1990).
- [4] SCHÜTZ (W.). – *Standardized stress-time histories: An overview. Development of fatigue loading spectra*. American Society for Testing Materials, ASTM STP 1006, (ed. J. M. Potter and R.T. Watanabe) Philadelphia, PA, USA, p. 3-16 (1989).
- [5] HEULER (P.) & KLÄTSCHKE (H.). – *Generation and use of standardized load spectra and load-time historie*. Inter. Journal of Fatigue 27 p. 974-990, Elsevier (2005).
- [6] PLUVINAGE (G.) et SAPUNOV (V.T.). – *Prévision statistique de la résistance, du fluage et de la résistance durable des matériaux de construction*. ISBN : 2-85428-735-5, Cepadues éditions (2006).
- [7] WEBER (B.). – *Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque*. Thèse de doctorat, INSA-Lyon, 99 ISAL0056 (juillet 1999).
- [8] LANNOY (A.). – *Introduction à la fiabilité des structures- Techniques de l'ingénieur* - [SE 2 070]. Base documentaire « Sécurité et gestion des risques » (2004).
- [9] SAVARD (M.). – *Étude de la sensibilité d'un pont routier aux effets dynamiques induits par la circulation routière*. 11^{ème} colloque sur la progression de la recherche québécoise des ouvrages d'art, université Laval, Québec (11- 12 mai 2004).
- [10] BEDARD (S.). – *Comportement des structures de signalisation aérienne en aluminium soumises à des sollicitations cycliques*. Mémoire de maîtrise ès sciences appliquées, École polytechnique de Montréal, 0-612- 60885-9 (octobre 2000).
- [11] LU (J.). – *Fatigue des alliages ferreux. Définitions et diagrammes- Techniques de l'ingénieur* -[BM 5 042]. Base documentaire « Fonctions et composants mécaniques » (2002).
- [12] RABBE (P.) et GALTIER (A.). – *Essais de fatigue. Partie I - Techniques de l'ingénieur* -[M 4 170]. Base documentaire « Étude et propriétés des métaux » (2000).
- [13] LALLET (P.), PINEAU (M.) et VIET (J.-J.). – *Analyse des sollicitations de service et du comportement en fatigue du matériel ferroviaire de la SNCF*. Revue générale des chemins de fer, Gauthier-Villars éditions, p. 19-29 (janvier 1995).
- [14] LELUAN (A.). – *Méthodes d'essais de fatigue et modèles d'endommagement pour les structures de véhicules ferroviaires*. Revue générale des chemins de fer, Gauthier-Villars éditions, p. 21-27 (décembre 1992).
- [15] TEN HAVE (A.). – *European approaches in standard spectrum development*. In *Development of fatigue loading spectra*. (ed. J.M. Potter et R.T. Watanabe), ASTM STP 1006, p. 17-35 (1989).

- [16] CLAUSEN (J.), HANSSON (J.S.O.) et NILSSON (F.). – *Generalizing the safety factor approach*. Reliability Engineering and System Safety 91 p. 964-973, Elsevier (2006).
- [17] OSGOOD (C.C.). – *Fatigue design*. Pergamon Press, New York (1982).
- [18] KOUTA (R.) et PLAY (D.). – *Durée de vie en service des composants mécaniques- Analyse de chargements aléatoires- Techniques de l'ingénieur-* [BM 5 030] Base documentaire « Fonctions et composants mécaniques » (2007).
- [19] KOUTA (R.) et PLAY (D.). – *Durée de vie en service des composants mécaniques - Modélisation de chargements aléatoires - Techniques de l'ingénieur-* [BM 5 031] Base documentaire « Fonctions et composants mécaniques » (2007).
- [20] KOUTA (R.) et PLAY (D.). – *Durée de vie en service des composants mécaniques – Méthodes de prises en compte des conséquences d'une sollicitation aléatoire - Techniques de l'ingénieur-* [BM 5 032] Base documentaire « Fonctions et composants mécaniques » (à paraître fin 2007).
- [21] DACUNHA-CASTELLE D., DUFLO M., Probabilités et statistique, tome 1, éditions Masson 1994.
- [22] REUCHLIN M., Les méthodes quantitatives en psychologie, PUF. 1975.
- [23] WHITTAKER E.T., WATSON G.N., A course of modern analysis, Cambridge Un. Pr. 1927-1965
- [24] MAURIN M. Jeux de variance et d'entropie, XXXI journées de statistique, 17-21 mai, Grenoble, France, (57-60)